由一个有趣问题引出的巧妙方法

杨金民　2019-05-16

问题：公安局人员截获一情报：一恐怖分子将一瓶有毒矿泉水，掺进了一批发往世博会的矿泉水中。现发现这批矿泉水共有 1000 瓶。为了获取证据，并把那瓶有毒的矿泉水挑拣出来，公安人员使出的办法是用小老鼠来喝水。已知只要小老鼠喝了一点那瓶有毒的水，就会在 24 小时内死去。请问最简的办法是需要多少只小老鼠，就可在 24 小时内将那瓶是有毒的挑拣出来。请具体描述出挑拣方法。

分析：这是一个搭配问题：瓶子与小老鼠的搭配问题。一方有 1000 瓶水，一方有 n 只小老鼠。目标是：能从小老鼠的表现，能够得出有毒的到底是哪一瓶?

假定只用一只小老鼠，办法是让这只小老鼠对这 1000 瓶，每瓶的水都喝点，如果 24 小时内死了，就说明这 1000 瓶中至少有 1 瓶发生了改变，由无毒变成了有毒。由此联想到奇偶校检法：对由 0 和 1 组成的串，它在存储或者传输过程中，串长不会发生变化，但是其中某个位置的 1 可能因为干扰变成 0，0 也可能变成 1。假定一个串最多只会有一个位发生变化。为了检测一个串在存储或者传输过程中是否有上述改变，增设一个校检位（1 bit）。如果串中的 1 的个数为奇数个，校检位设为 1，否则设为 0。

奇偶校检的本质含义是：统计 1 的个数，然后除以 2，取余数。余数自然只须 1 bit 来存储。对统计结果，除以一个数 k，取余，其用意是进行压缩处理，缩小其值，节省存储空间。当然，压缩处理有代价，那就是信息的丢失。上述奇偶校检，当传输中发生的位改变的数量为奇数个时，它能感知出来，但是如果位改变的数量为偶数个时，它就不能感知。如果改成除以 4，取余，那么当位改变的数量不为 4 的倍数时，它能感知出来；如果为 4 的倍数，它就不能感知出来。由此可见，除以 4 取余，比除以 2 取余，感知能力增强了。不过代价也增大了，校检值须要 2 个 bits 来存储，增加了一个 bit。而且要假定校检位在存储或者传输过程中不会改变。

到底是采用除以 2 取余，还是除以 4 取余？要看出错概率。传输一个 bit，假定发生位改变的概率为 p。假定一次传输 8 bits，那么发生 0 个 bit 改变（即传输完全正确）的概率是 $P_0 = C_8^0p^0(1-p)^8$，发生一个 bit 改变的概率是 $P_1 = C_8^1p^1(1-p)^7$，发生两个 bits 改变的概率是 $P_2 = C_8^2p^2(1-p)^6$，发生三个 bits 改变的概率是 $P_3 = C_8^3p^3(1-p)^7$，依次类推，发生八个 bits 改变的概率是 $P_8 = C_8^8p^8(1-p)^0$。

设 p=0.01, 即传输改变概率为 1%，那么 $P_0 = 0.922$；　$P_1 = 0.074$；　$P_2 = 0.0026$；　$P_3 = 0.00005$；

设 p=0.02, 即传输改变概率为 2%，那么 $P_0 = 0.851$；　$P_1 = 0.139$；　$P_2 = 0.010$；　$P_3 = 0.00006$；

从上述计算可知：P_2 成倍地小于 p;　P_1 远远大于 p。

从 P_1 远远大于 p 可知，奇偶校检很有必要。采用奇偶校检后，尽管 8 个 bits 一起传输，传输中发生了改变而又不能通过奇偶校检感知出来的概率为 P_2 (P_4, P_6，...，因太小，都可忽略不计)，比 p 都还

明显小，因此，奇偶校检显著地提升了传输的可靠性。记住，**可靠性有个特性，就是只有提升的概念，没有完全解决的概念。**

接下来的问题是：假定通过奇偶校检，发现了一个位改变，能不能知道到底是哪一个位发生了改变？如果知道，就可纠错，不须要重传了。

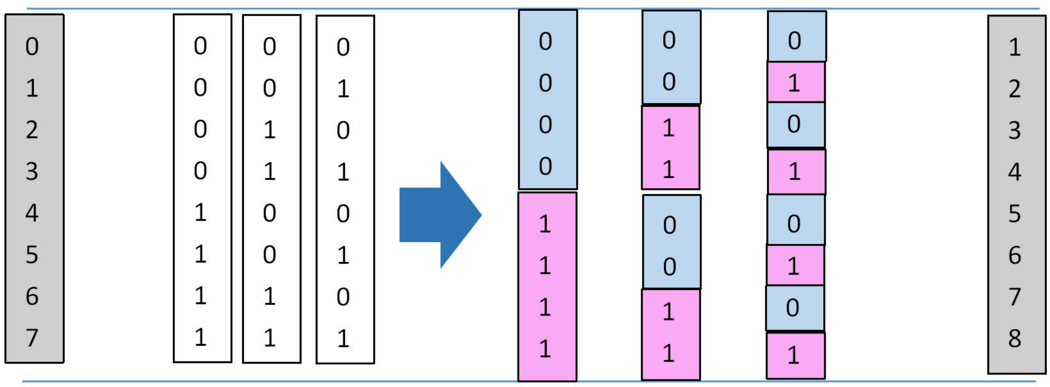
奇偶校检位，它自己在传输过程中也可能发生改变。在随后解决“到底是哪一位发生改变？”时，把奇偶校检位也视作一个数据位来看待。

联系：1000 瓶中含有 1 瓶有毒矿泉水 $\Rightarrow$ 检错；

1000 瓶中哪一瓶是有毒矿泉水 $\Rightarrow$ 纠错；

用 1000 只小老鼠，每只对应一瓶， 自然一下子就能知道是哪一瓶有毒，不仅能检错，还能纠错。不过成本太大而已，也是连幼儿园的小朋友都能想出的办法。这种办法叫直觉方法，不须要知识。

稍微动点脑筋，搞点分类，情形就大不一样。首先要标识每瓶矿泉水，用编号来标识：第 1，第 2，第 3，...., 第 1000 瓶。为了阐释道理，缩小规模，假设只有 8 瓶矿泉水。标识成第 1，第 2，第 3，....，第 8 瓶。其中有一瓶是有毒的。我们的策略是：递归地进行划分。在第一轮划分中，将整个 8 瓶一分为二，分成 A,B 两组：A 组为第 1，第 2，第 3，第 4 瓶；B 组为第 5，第 6，第 7，第 8 瓶。在第二轮划分中，对 A,B 两组再一分为二：第 1，第 2 瓶为 A 组；第 3，第 4 瓶为 B 组；第 5，第 6 瓶为 A 组；第 7，第 8 瓶为 B 组。在第三轮划分中，第 1 瓶为 A 组；第 2 瓶为 B 组；第 3 瓶为 A 组；第 4 瓶为 B 组；第 5 瓶为 A 组；第 6 瓶为 B 组；第 7 瓶为 A 组；第 8 瓶为 B 组。至此，一组包含的元素个数为 1，达到了最小粒度值，划分完毕。结果如下图所示，0 为 A 组，1 为 B 组：



第 1 轮 一分为二　　第 2 轮 一分为二　　第 3 轮 一分为二

对每一轮，选定一个组，例如 B 组，安排一只小老鼠，来喝其中的水。具体来说，让第一只小老鼠对第 5，第 6，第 7，第 8 瓶中的水都喝一点；让第二只小老鼠对第 3，第 4，第 7，第 8 瓶中的水都喝一点；让第三只小老鼠喝对第 2，第 4，第 6，第 8 瓶中的水都喝一点。24 小时后，如果

第一只小老鼠死了，说明有毒的在第 5，第 6，第 7，第 8 瓶中 $\Rightarrow$ 有毒$\in$ {5,6,7,8}

第二只小老鼠死了，说明有毒的在第 3，第 4，第 7，第 8 瓶中 $\Rightarrow$ 有毒$\in$ {3,4,7,8}

第三只小老鼠死了，说明有毒的在第 2，第 4，第 6，第 8 瓶中 $\Rightarrow$ 有毒$\in\{2,4,6,8\}$

现在知道有且仅只一瓶有毒，于是，求三个含毒集合的交集：$\{5,6,7,8\}\cap\{3,4,7,8\}\cap\{2,4,6,8\} = \{8\}$

于是，得出第 8 瓶为有毒的结论。

如果检测结果为：只有第二只小老鼠死了，第一、第三只小老鼠没有死，则说明：

第一只小老鼠没有死 $\Rightarrow$ $\{5,6,7,8\}$ 无毒 $\Rightarrow$ 有毒$\in\{1,2,3,4\}$

第二只小老鼠死了 $\Rightarrow$ 有毒$\in\{3,4,7,8\}\Rightarrow$ $\{1,2,5,6\}$ 无毒

第三只小老鼠没有死 $\Rightarrow$ $\{2,4,6,8\}$ 无毒 $\Rightarrow$ 有毒$\in\{1,3,5,7\}$

求三个含毒集合的交集：$\{1,2,3,4\} \cap\{1,3,7,8\} \cap\{3,4,7,8\} = \{3\}$

于是，得出第 3 瓶为有毒的结论。

再来看规律：

对于 B 组，第一轮：$\alpha=\{5,6,7,8\}$，第二轮：$\beta=\{3,4,7,8\}$；第三轮：$\gamma=\{2, 4, 6, 8\}$，

有：$\alpha\cap\beta\cap\gamma = \{8\}$； $\alpha\cap\beta = \{7, 8\}$； $\alpha\cap\gamma = \{6, 8\}$； $\beta\cap\gamma = \{4, 8\}$

即：2 仅只出现在γ中； 4 出现在 β，γ中；6 出现在 α，γ中；7 出现在 α， β 中； 8 在 α， β，γ中都出现。而 1 在三轮 α， β，γ中都没有出现。也就是说，1， 2， 3， 4， 5， 6， 7， 8 存在正交性，即存在测试中的可区分性，这就是方法的巧妙所在。

进行归纳：对 n 瓶矿泉水进行递归二分。于是树的深度为：$\lceil\log_2 n\rceil+1$。须要$\lceil\log_2 n\rceil$个小老鼠来喝水，除了 root 结点外，每个小老鼠对应一层。选取其中的一组，假设为 A 组，让每层对应的小老鼠来喝该层中 A 组瓶中的水。于是就可仅只须要$\lceil\log_2 n\rceil$个小老鼠，就可把含毒的那瓶矿泉水挑拣出来。

上述方案的另一特点是：让第一只小老鼠，第二只小老鼠，第三只小老鼠来并行地处理第一轮，第二轮，第三轮测试。

如果没有时间限制，可安排第一只小老鼠进行第一轮测试，如果在 24 小时没死的话，那么接着用它进行第二轮测试，再过 24 小时，如果还没死，再用它进行第三轮测试。如果在某轮测试中，小老鼠死了，那么就要用新的一只小老鼠来继续测试，直至完成最后一轮测试。这就叫串行处理。

假设总共有 1024 瓶矿泉水（$=2^{10}$），那么就要进行 10 轮测试，才能把有毒的那瓶挑拣出来。按照上述串行测试办法，那么平均来说，要多少只小老鼠才能把那瓶有毒的挑拣出来呢？

第 i 轮测试	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
第 i 轮测试后还没死的概率	$1/2$	$1/2^2$	$1/2^3$	$1/2^4$	$1/2^5$	$1/2^6$	$1/2^7$	$1/2^8$	$1/2^9$	$1/2^{10}$
死在第 i 轮测试的概率	$1/2$	$1/2^2$	$1/2^3$	$1/2^4$	$1/2^5$	$1/2^6$	$1/2^7$	$1/2^8$	$1/2^9$	$1/2^{10}$

仅须 1 只小老鼠，就可检测出来，须要依次检测 10 轮，检测总时间为 10*24 小时。检测办法是，在第一轮测试中，让它对 1-500 号瓶，每瓶都喝一点，如果没死，说明有毒的在 501 至 1000 号之间，于是在第二轮测试中，让它对 501-750 号瓶，每瓶都喝一点，如果没死，说明有毒的在 751 至 1000 号之间。于是在第三轮测试中，让它对 751-875 号瓶，每瓶都喝一点，如果还没死，说明有毒的在 876 至 1000 号之间。有毒的范围在不断缩小，直至剩下 2 瓶，做最后一轮试验。

如果在第一轮中，小老鼠死了，说明有毒的在 1 至 500 号之间，于是在第二轮测试中，用新的一只小老鼠，让它对 1-250 号瓶，每瓶都喝一点。在其它轮，依次类推。

最后一轮试验，也就是第 10 轮检测，小老鼠死与不死都没关系，都能完成检测，因为最后就只剩两瓶了，让小老鼠喝其中的一瓶，如果死了说明喝的那瓶有毒，没死则说明剩下的那瓶有毒。仅用 1 只小老鼠就能挑拣出有毒的那瓶矿泉水，那就要求小老鼠从第 1 轮开始直至第 9 轮（倒数第二轮）检测后，都一直没死，其概率自然为 $p = 1/2*1/2*1/2*...*1/2 = 1/2^9$

即：$p = C_9^0 \times 1/2^9$

如果是仅须 2 只小老鼠，就可检测出来，还是要依次检测 10 轮，检测总时间还是 10*24 小时。分两层来考虑：

第一层：第一只小老鼠死在第 1 轮试验，第 2 轮试验，第 3 轮试验，.....，**第 9 轮**试验上；

第二层：在第一层的基础上，假设第一只小老鼠死在第 i 轮试验上，则要求第二只小老鼠从第 i+1 轮试验直至**第 9 轮**试验都不死；

因此，两者要同时成立，于是要且仅要 2 只小老鼠的概率为：

求概率：

for i = 1 to 9

$p = p + 1/2^i \times 1/2^{(9-i)}$

即：$p = C_9^1 \times 1/2^9$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9

即：$p = 1/2*1/2^8 + 1/2^2*1/2^7 + 1/2^3*1/2^6 + ... + 1/2^9 = 9 / 2^9$

如果是要且仅要 3 只小老鼠，就可检测出来，须要时间还是 10*24 小时。那就要分三层了：

第一层：第一只小老鼠死在第 1 轮试验，第 2 轮试验，第 3 轮试验，.....，**第 8 轮**试验上；

第二层：在第一层的基础上，假设第一只小老鼠死在第 i 轮实验上，第二只小老鼠则可能是是死在第 i+1, i+2, ..., **第 9 轮**试验上；

第三层：在第二层的基础上，假设第二只小老鼠死在第 j 轮实验上，第三只小老鼠直至**第 9 轮试验**都没有死；

求概率：

for　i = 1 to 8

　for j = i+1 to 9

　　　$p = p + 1/2^{i} \times 1/2^{(j-i)} \times 1/2^{(9-j)}$

即：$p = C_9^2 \times 1/2^9$

i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
j 的个数	2~9 = 8	3~9=7	4~9=6	5~9=5	6~9=4	7~9=3	8~9=2	9~9=1

以此类推，要且仅须 4 只小老鼠，就可检测出来，须要时间还是 10*24 小时。那就要分四层了：

第一层：第一只小老鼠死在第 1 轮试验，第 2 轮试验，第 3 轮试验，.....，**第 7 轮**试验上；

第二层：在第一层的基础上，假设第一只小老鼠死在第 i 轮试验上，第二只小老鼠则是死在第 i+1, i+2, ..., **第 8 轮**试验上；

第三层：在第二层的基础上，假设第二只小老鼠死在第 j 轮试验上，第三只小老鼠直至**第 9 轮试验**都没有死；

第四层：在第三层的基础上，假设第三只小老鼠死在第 k 轮试验上，第四只小老鼠直至**第 9 轮试验**都没有死；

求概率：

for　i = 1 to 7

　for j = i+1 to 8

　　for k = j+1 to 9

　　　$P = p + 1/2^{i} * 1/2^{(j-i)} * 1/2^{(k-j)} * 1/2^{(9-k)}$

即：$p = C_9^3 \times 1/2^9$

i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
j	2~8	3~8	4~8	5~8	6~8	7~8	8~8
k	3~9= 7 4~9=6 5~9=5 6~9=4 7~9=3 8~9=2 9~9=1	4~9=6 5~9=5 6~9=4 7~9=3 8~9=2 9~9=1	5~9=5 6~9=4 7~9=3 8~9=2 9~9=1	6~9=4 7~9=3 8~9=2 9~9=1	7~9=3 8~9=2 9~9=1	8~9=2 9~9=1	9~9=1

再推，要且仅须 5 只小老鼠，就可检测出来，须要时间还是 10*24 小时。

那就要分六层了：

第一层：第一只小老鼠死在第 1 轮试验，第 2 轮试验，第 3 轮试验，.....，**第 6 轮**试验上；

第二层：在第一层的基础上，假设第一只小老鼠死在第 i 轮试验上，第二只小老鼠则是死在第 i+1, i+2, ..., **第 7 轮**试验上；

第三层：在第二层的基础上，假设第二只小老鼠死在第 j 轮试验上，第三只小老鼠直至**第 8 轮试验**都没有死；

第四层：在第三层的基础上，假设第三只小老鼠死在第 k 轮试验上，第四只小老鼠直至**第 9 轮试验**都没有死；

第五层：在第四层的基础上，假设第四只小老鼠死在第 t 轮试验上，第五只小老鼠直至**第 9 轮试验**都没有死；

求概率：

for i = 1 to 6

  for j = i+1 to 7

    for k = j+1 to 8

      for t = k+1 to 9

        $P = p + 1/2^{i} * 1/2^{(j-i)} * 1/2^{(k-j)} * 1/2^{(t-k)} * 1/2^{(9-t)}$

即：$p = C_9^4 \times 1/2^9$

i	1		2		3		4	5	6
j	2~7		3~7		4~7		5~7	6~7	7~7
k，t	**3~8 = 6**	**4~9= 6**	**4~8=5**	**5~9= 5**	5~8=4	6~9= 4	**6~8=3**	**7~8=2**	8~8=1
		5~9= 5		**6~9= 4**		7~9= 3	**7~8=2**	8~8=1	
		6~9= 4		**7~9= 3**		8~9= 2	8~8=1		
		7~9= 3		**8~9= 2**		9~9= 1	**7~9= 3**	**8~9= 2**	9~9= 1
		8~9= 2		**9~9= 1**	**6~8=3**	**7~9= 3**	**8~9= 2**	**9~9= 1**	
		9~9= 1	5~8=4	6~9= 4		**8~9= 2**	**9~9= 1**		
	4~8=5	5~9= 5		7~9= 3		**9~9= 1**		9~9= 1	
		6~9= 4		8~9= 2	7~8=2	8~9= 2	**8~9= 2**		
		7~9= 3		9~9= 1		9~9= 1	**9~9= 1**		
		8~9= 2	**6~8=3**	**7~9= 3**	**8~8=1**	**9~9= 1**			
		9~9= 1		**8~9= 2**			9~9= 1		
	5~8=4	**6~9= 4**		**9~9= 1**					
		7~9= 3	7~8=2	8~9= 2					
		8~9= 2		9~9= 1					
		9~9= 1							
	6~8=3	7~9= 3	**8~8=1**	**9~9= 1**					
		8~9= 2							

	7~8=2 8~8=1	9~9= 1 **8~9= 2** **9~9= 1** 9~9= 1							

再推，要且仅须 6 只小老鼠，就可检测出来，须要时间还是 10*24 小时。

那就要分六层了：

第一层：第一只小老鼠死在第 1 轮试验，第 2 轮试验，第 3 轮试验，.....，**第 5 轮**试验上；

第二层：在第一层的基础上，假设第一只小老鼠死在第 i 轮试验，第二只小老鼠则是死在第 i+1, i+2, ..., **第 6 轮**试验上；

第三层：在第二层的基础上，假设第二只小老鼠死在第 j 轮试验，第三只小老鼠直至**第 7 轮试验**都没有死；

第四层：在第三层的基础上，假设第三只小老鼠死在第 k 轮试验，第四只小老鼠直至**第 8 轮试验**都没有死；

第五层：在第四层的基础上，假设第四只小老鼠死在第 t 轮试验，第五只小老鼠直至**第 9 轮试验**都没有死；

第六层：在第五层的基础上，假设第五只小老鼠死在第 s 轮试验，第六只小老鼠直至**第 9 轮试验**都没有死；

求概率：

```
for   i = 1 to 5
   for j = i+1 to 6
      for k = j+1 to 7
            for t = k+1 to 8
                 for s = t+1 to 9
```

$P = 1/2^{i} * 1/2^{(j-i)} * 1/2^{(k-j)} * 1/2^{(t-k)} * 1/2^{(s-t)} * 1/2^{(9-s}$

即：$p = C_9^5 \times 1/2^9$

归纳总结： for   i = 1 to n- 4

```
for j = i+1 to n - 3
         for k = j+1 to n - 2
               for t = k+1 to n - 1
                     for s = t+1   to   n
```

总的循环次数 $= C_n^5$

这是一个接力赛的组合问题，即共有 n 关，由 5 个人来接力完成过 n 关。问有多少种接力情形。

举例如下:

假定整个有 16(=2^4)瓶矿泉水时，那么

要且仅要的小老鼠个数	发生的概率
1	即：$p = C_3^0 \times 1/2^3 = 1*1/2^3$
2	即：$p = C_3^1 \times 1/2^3 = 3*1/2^3$
3	即：$p = C_3^2 \times 1/2^3 = (2+1)*1/2^3$
4	即：$p = C_3^3 \times 1/2^3 = 1*1/2^3$

于是，平均须要 **1***1*1/2^3 + **2***3*1/2^3 + **3***3*1/2^3+ **4***1*1/2^3 = 2.5 个小老鼠，才能从 16 瓶找中挑拣出哪一瓶是有毒的。

假定整个有 32(=2^5)瓶矿泉水时，那么

要且仅要的小老鼠个数	概率
1	即：$p = C_4^0 \times 1/2^4 = 1*1/2^4$
2	即：$p = C_4^1 \times 1/2^4 = 4*1/2^4$
3	即：$p = C_4^2 \times 1/2^4 = (3+2+1)*1/2^4$
4	即：$p = C_4^4 \times 1/2^4 = ((2+1)+1)*1/2^4$
5	即：$p = C_4^4 \times 1/2^4 = 1*1/2^4$

于是，平均须要 **1***1*1/2^3 + **2***4*1/2^3 + **3***6*1/2^3+ **4***4*1/2^3 + **5***1*1/2^3= 3 个小老鼠，才能从 32 瓶找中挑拣出哪一瓶是有毒的。

假定整个有 64(=2^6)瓶矿泉水时，那么

要且仅要的小老鼠个数	概率
1	即：$p = C_5^0 \times 1/2^5 = 1*1/2^5$
2	即：$p = C_5^1 \times 1/2^5 = 5*1/2^5$
3	即：$p = C_5^2 \times 1/2^5 = (4+3+2+1)*1/2^5$

4	即：$p = C_5^3 \times 1/2^5 =$ $((3+2+1)+(2+1)+1)*1/2^5$
5	即：$p = C_5^4 \times 1/2^5 =$ $5*1/2^5$
6	即：$p = C_5^5 \times 1/2^5 =$ $1*1/2^5$

于是，平均须要 **1**$*1*1/2^3$ + **2**$*5*1/2^3$ + **3**$*10*1/2^3$+ **4**$*10*1/2^3$ + **5**$*5*1/2^3$ + **6**$*1*1/2^3$= 3.5 个小老鼠，才能从 64 瓶找中挑拣出哪一瓶是有毒的。

假定整个有 128(=2^7)瓶矿泉水时，那么

要且仅要的小老鼠个数	概率
1	即：$p = C_6^0 \times 1/2^6 =$ $1*1/2^6$
2	即：$p = C_6^1 \times 1/2^6 =$ $6*1/2^6$
3	即：$p = C_6^2 \times 1/2^6$ = (5 + 4 + 3 + 2 + 1)$*1/2^6$
4	即：$p = C_6^3 \times 1/2^6$ = ([4+3+2+1] + [3+2+1] + [2+1] + 1)$*1/2^6$
5	即：$p = C_6^4 \times 1/2^6$ = ([(3+2+1)+(2+1) +1] + [(2+1)+1] + [1])$*1/2^6$
6	即：$p = C_6^5 \times 1/2^6$ = $6*1/2^6$
7	即：$p = C_6^6 \times 1/2^6$ = $1*1/2^6$

于是，平均须要 **1**$*1*1/2^3$ + **2**$*6*1/2^3$ + **3**$*15*1/2^3$+ **4**$*20*1/2^3$ + **5**$*15*1/2^3$ + **6**$*6*1/2^3$+ **7**$*1*1/2^3$=4 个小老鼠，才能从 128 瓶找中挑拣出哪一瓶是有毒的。

假定整个有 256(=2^8)瓶矿泉水时，那么

要且仅要的小老鼠个数	概率
1	即：$p = C_7^0 \times 1/2^7$ = $1*1/2^7$ = 1
2	即：$p = C_7^1 \times 1/2^7$ = $7*1/2^7$ = 7
3	即：$p = C_7^2 \times 1/2^7$ = (6+5+4 +3+2+1)$*1/2^7$= 21
4	即：$p = C_7^3 \times 1/2^7$ = ([5+4+3+2+1] + [4+3+2+1] + [3+2+1] + [2+1] + [1])$*1/2^7$= 35
5	即：$p = C_7^4 \times 1/2^7$ = ([(4+3+2+1)+(3+2+1) +(2+1) +1] + [**(3+2+1) +(2+1) +1**] + [(2+1) + 1] + [**1**]) * $1/2^7$ = 35

6	即：$p = C_7^5 \times 1/2^7 = ([(3+2+1) + (2+1) + 1 \quad + (2+1) + 1 \quad +1\,] \quad + \quad [(2+1) + 1 \quad + 1] \quad + \quad [1])\ {*}1/2^7 = 21$
7	即：$p = C_7^6 \times 1/2^7 = 7{*}1/2^7 = 7$
8	即：$p = C_7^7 \times 1/2^7 = 1{*}1/2^7 = 1$

于是，平均须要 **1***1*$1/2^3$ + **2***7*$1/2^3$ + **3***21*$1/2^3$+ **4***35*$1/2^3$ + **5***35*$1/2^3$ + **6***21*$1/2^3$+ **7***7*$1/2^3$+ **8***1*$1/2^3$ = 4.5 个小老鼠，才能从 256 瓶找中挑拣出哪一瓶是有毒的。

归纳与推广：

假定小老鼠会有三个状态：中毒死亡，打颤，正常。每个状态等概率发生，那么，

第 i 轮试验	1	2	3	4	5	6	7	8
第 i 轮试验后还没死的概率	2/3	$(2/3)^2$	$(2/3)^3$	$(2/3)^4$	$(2/3)^5$	$(2/3)^6$	$(2/3)^7$	$(2/3)^8$
死在第 i 轮试验的概率	1/3	2/3×1/3	$(2/3)^2\times1/3$	$(2/3)^3\times1/3$	$(2/3)^4\times1/3$	$(2/3)^5\times1/3$	$(2/3)^6\times1/3$	$(2/3)^7\times1/3$

要且仅须 3 只小老鼠，就可检测出来，须要时间还是 10*24 小时。

那就要分三层了：

第一层：第一只小老鼠死在第 1 轮试验，第 2 轮试验，第 3 轮试验，.....，**第 6 轮**试验上；

第二层：在第一层的基础上，假设第一只小老鼠死在第 i 轮实验上，第二只小老鼠则可能是是死在第 i+1, i+2, ...， **第 7 轮**试验上；

第三层：在第二层的基础上，假设第二只小老鼠死在第 j 轮实验上，第三只小老鼠直至**第 7 轮试验**都没有死；

求概率：

for　i = 1 to 6

　for j = i+1 to 7

　　$p = p + (2/3)^{i-1}\times1/3 \quad \times \quad (2/3)^{(j-i)-1}\times1/3 \quad \times \quad (2/3)^{(7-j)}$

即：$p = C_7^2 \times(2/3)^5\times(1/3)^2$

含义是：每轮试验都是彼此相互独立的，依次进行了 7 轮试验，7 轮实验中，任选两轮，发生了小老鼠死亡，剩下的五轮自然是都没有发生小老鼠死亡。

由此引出汉明码(Hamming coding)

设传输中，有 15 bits 的数据位，再加上 1 bit 的奇偶校检位，共 16 位。假设通过奇偶校检，感知到了有一位发生改变。接下来的问题是：到底是哪一位发生了改变？

同样的道理，该问题是要对 16 个位置，挑拣出到底是哪一个位置发生了改变。首先是对 16 个位置进行一分为二，递归下去，得到如下的情形：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
第一层																
第二层																
第三层																
第四层																

于是传输中，还要增设 4 bits 的**层校检位**。原始数据在传输或者存储前，**先生成奇偶校检位，然后再生成层校检位**。传输给接收方。接收者收到 20 bits 的数据后，先对前 15 bits 的数据位，计算奇偶校检值，然后和接收到的第 16 bit（奇偶校检位）比较，如果相同，则说明整个 16 bits 的数据传输完全正确。

如果不相同，则说明前面 16 bits 中有且仅有某个位置的 bit 值在传输中因为干扰发生了改变。接下来就使用**层校检**来确定到底是哪一位发生了改变。

接收者使用接收到的前 16 bits 数据，计算层校检位，共 4 层，因此有四个 bits，设为 c_1, c_2, c_3, c_4

如果计算出的 $c_1 \neq$ 接收到的 c_1 $\Rightarrow$ 改变位 $\in \{9,10,11,12,13,14,15,16\}$

否则，改变位 $\in \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

如果计算出的 $c_2 \neq$ 接收到的 c_2 $\Rightarrow$ 改变位 $\in \{5,6,7,8,13,14,15,16\}$

否则，改变位 $\in \{1,2,3,4,9,10,11,12\}$

如果计算出的 $c_3 \neq$ 接收到的 c_3 $\Rightarrow$ 改变位 $\in \{3,4,7,8,11,12,15,16\}$

否则，改变位 $\in \{1,2,5,6,9,10,13,14\}$

如果计算出的 $c_4 \neq$ 接收到的 c_4 $\Rightarrow$ 改变位 $\in \{2,4,6,8,10,12,14,16\}$

否则，改变位 $\in \{1,3,5,7,9,11,13,15\}$

再对四个改变位的集合做交运算，就得出了到底是哪一位发生了改变。如是它的值是 0 ，就对它纠错，改成 1。如是它的值是 1 ，就对它纠错，改成 0。

举例：四层检测发现：计算出的 c_1 = 接收到的 c_1，计算出的 c_2 = 接收到的 c_2，计算出的 c_3 = 接收到的 c_3，计算出的 c_4 = 接收到的 c_4，

那么，改变位 = {1,2,3,4,5,6,7,8} ∩ {1,2,3,4,9,10,11,12}∩ {1,2,5,6,9,10,13,14}∩ {1,3,5,7,9,11,13,15} = {1}

即第 1 位发生改变。因此，总是会认为有一位发生改变。

对四层检测中，我们可以发现：

四层中都出现的有 1 个(C_4^4)：第 16 位；
出现在三层中的有 4 个(C_4^3)：第 8,12,14,15 位；
出现在二层中的有 6 个(C_4^2)：第 4,6,7,10,11,13 位；
出现在一层中的有 4 个(C_4^1)：第 2,3,5,9 位；
四层中都不出现的有 1 个(C_4^0)：第 1 位；

注意：假设有两个位发生了改变时，例如，第 2 和第 3 位发生了改变。按照层校检方法：在三、四层报错。于是{1,2,3,4,5,6,7,8} ∩ {1,2,3,4,9,10,11,12}∩ {3,4,7,8,11,12,15,16}∩ {2,4,6,8,10,12,14,16} = {4}

即检测出第 4 位发生改变，而实际是第 2 和第 3 位发生改变。这时，**层检测法**变得毫无意义。

也就是说，该方法的前提就是：**有且仅有**一个位发生了改变，该方法所起的作用是定位这个改变到底发生在哪一个位置。尽管真实情况是可能有多个位发生了改变，但该方法**总是会判定出某一位发生改变，而且与真实的不相符**。

于是，使用该方法之前，先要得出**有且仅有**一个位发生了改变的这一结论，然后才可使用该方法来解决“到底是哪一位发生了改变？”这一问题。