

基于非局部相似块低秩的压缩感知图像重建算法

宋 云^{1,2,3}, 李雪玉^{1,2,4}, 沈燕飞⁴, 杨高波³

(1. 长沙理工大学综合交通运输大数据智能处理湖南省重点实验室, 湖南长沙 410114;

2. 长沙理工大学计算机与通信工程学院, 湖南长沙 410114;

3. 湖南大学信息科学与工程学院, 湖南长沙 410012; 4. 中国科学院计算技术研究所, 北京 100190)

摘 要: 传统的压缩感知重建算法利用信号在某个特征空间下的稀疏性构建目标优化函数, 但没有充分考虑信号的局部特性和结构化属性, 影响了算法的重建性能和算法的适应性. 本文考虑图像的非局部自相似性 (Nonlocal Self-Similarity, NLSS), 提出一种基于图像相似块低秩的压缩感知图像重建算法, 将图像恢复问题转化为聚合的相似块矩阵秩最小问题. 算法以最小压缩感知重建误差为约束构建优化模型, 并采用加权核范数最小化算法 (Weighted Nuclear Norm Minimization, WNNM) 求解低秩优化问题, 很好地挖掘了图像自身的信息和结构化稀疏特征, 保护了图像的结构和纹理细节. 多个测试图像、不同采样率下的实验证明了算法的有效性, 特别是在低采样率下对于纹理较为丰富的图像, 提出的算法图像重建质量较明显的优于最新的同类算法.

关键词: 压缩感知; 图像重建; 非局部自相似; 低秩优化

中图分类号: TP391 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2017)03-0695-09

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn> **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2017.03.029

Compressed Sensing Image Reconstruction Based on Low Rank of Non-local Similar Patches

SONG Yun^{1,2,3}, LI Xue-yu^{1,2,4}, SHEN Yan-fei⁴, YANG Gao-bo³

(1. Hunan Provincial Key Laboratory of Intelligent Processing of Big Data on Transportation, Changsha University of Science and Technology, Changsha, Hunan 410114 China;

2. School of Computer and Communication Engineering, Changsha University of Science and Technology, Changsha, Hunan 410114 China;

3. College of Computer Science and Electronic Engineering, Hunan University, Changsha, Hunan 410012 China;

4. Institute of Computing Technology, Chinese Academy of Sciences, Beijing, 100190, China;)

Abstract: Generally, traditional compressed sensing (CS) image recovery methods build the objective optimization function by using the signal sparsity in some specific feature spaces. They do not fully take the local features and structural properties of signal into account, which leads to constraints of the recovery performance and flexibility. In this paper, considering the non-local self-similarity (NLSS) in images, we propose an image CS reconstruction method based on the image low-rank property by converting the CS recovery problem into a matrix rank minimization problem of aggregating similar image patches. The proposed algorithm builds optimization model under the constraint of minimal recovery errors and employs the weighed nuclear norm minimization (WNNM) method to solve the low-rank optimization problem. By taking advantage of them, the proposed method exploits the self-information and structured sparse characteristics of the image very well, and therefore provides a better protection of image structures and textures. Experiments on different test images under various sampling rates have shown the effectiveness of the proposed algorithm. Especially, for richly-textured images, our method outperforms the art-of-the-state algorithms significantly under low sampling rates.

Key words: compressive sensing; image recovery; non-local self-similarity; low-rank optimization

收稿日期: 2015-08-05; 修回日期: 2015-11-10; 责任编辑: 梅志强

基金项目: 国家自然科学基金 (No. 61471343, No. 61572183, No. 61402053); 湖南省教育厅科学研究重点项目 (No. 13A107, No. 15A007); 湖南省自然科学基金 (No. 2016JJ2005); 湖南省科技计划项目 (No. 2014FJ6047, No. 2014GK3030)

1 引言

压缩感知 (Compressed Sensing, CS)^[1,2] 是近年来提出的一种信号采样模式,能够以远低于香农-奈奎斯特采样频率的速率采样信号,并实现精确恢复. 由于信号采样与数据压缩可同时进行,压缩感知方法具有采样速率低、采集效率高等优点,开始得到广泛的应用^[3,4]. 信号的精确、高质量重建是压缩感知理论研究的核心问题,也是推动压缩感知应用的关键. 经典的压缩感知信号重建算法包括凸松弛优化方法^[5]、贪婪算法^[6,7]和迭代阈值算法^[8]等. 凸松弛优化方法所需的感知测量次数较少,重建效果也很好,但它的计算复杂度高,不适合大尺度的压缩感知重建^[5]. 贪婪算法显著地降低了计算复杂度,重建精度也较高,但是需要预先设定信号的稀疏度,难以应用在原始信号稀疏度变化比较大的复杂环境^[6,7]. 迭代阈值算法作为凸优化的一种,通过对前一估计值的阈值滤波处理得到新的估计值^[8],实现较为简单,但其收敛速度通常较慢. 在经典的迭代阈值算法的基础上, Osher 等人提出了布莱格曼 (Bregman) 迭代算法^[9],该算法计算复杂度低,收敛速度快,适用于大尺度的压缩感知重建问题. 此外,基于非凸优化的压缩感知问题求解也开始受到关注^[10],这类方法能够提高压缩感知的重建精度,但是计算复杂度仍然较高,实际应用场景受到限制.

尽管上述经典算法取得了优良的重建性能,但是都只考虑了信号在某个特定特征空间的稀疏特性,没有挖掘信号的局部和其他结构化特征,致使信号的细节保护不够,适应性不强. 进一步挖掘信号的先验知识可以提高压缩感知重建性能,提高算法适应性. 图像信号具有显著的结构化特征,除了变换域稀疏特性,还可以利用其他先验知识作为约束,构建更为合理的恢复算法,更好地保护图像结构和纹理细节,提高图像重建性能. 近来一些基于图像局部平滑性^[11]、模型特性^[12,13]、非局部相关性^[14,15]等先验的压缩感知重建算法都取得很好的效果. 特别是利用图像的非局部相关性作为约束构建重建算法,能够较为充分地挖掘图像的结构化和组稀疏特征,近年来受到了广泛的重视. 文献[16]利用图像的非局部自相似性 (Nonlocal Self-Similarity, NLSS),提出了一种基于块匹配和稀疏三维变换域联合滤波 (Block-Matching and Sparse 3-D Transform-Domain Collaborative Filtering, BM3D) 的压缩感知图像重建算法 BM3D-CS,取得了非常好的重建性能. 文献[17]进一步挖掘图像的非局部结构/组稀疏特性,提出了一种基于非局部低秩的压缩感知重建算法 (Compressive Sensing Via Nonlocal Low-Rank Regularization, NLR-CS). NLR-CS 将组稀疏低秩正则项约束引入到变分框

架,结合了图像的非局部自相似性及相似图像块的低秩特性,获得了优于 BM3D-CS 的重建性能. 但是, NLR-CS 以最小低秩表达残差为约束构建优化目标函数,本质上是将压缩感知图像重建问题转化为一个最优低秩表达问题,约束正则项会引导结果倾向于相似图像块间差异更小的解. 而事实上,自然图像中的不同图像块通常只具有较强的结构相似性,细节上仍然大概率存在差异, NLR-CS 的最优低秩表示模型会在一定程度上损失图像细节,引起块效应. 本文提出一种基于非局部相似块低秩的压缩感知图像重建算法,从压缩感知重建的角度考虑问题,以最小重建误差为约束构建低秩优化模型,引导优化结果偏向能感知获得最小测量误差的解. 算法先基于图像的非局部相似先验对图像中的相似块进行聚集,将相似块展开为向量并组合成二维矩阵,然后以最小重建误差作为约束条件对相似图像块矩阵进行秩最小化求解,聚合得到压缩感知重建图像. 算法采用增广拉格朗日方法将受限优化问题转换为非受限优化问题,并应用交替方向乘子法 (Alternative Direction Multiplier Method, ADMM)^[18] 简化问题的求解. 此外,除了问题模型不同外,与文献 NLR-CS 采用光滑非凸的 logdet 函数近似低秩问题不同,本文采用加权核范数最小化算法^[19]求解低秩优化问题,以通过加权不同图像子空间成分,即给对应图像细节部分的较大奇异值分配较小的权重,进行较小的收缩,进一步保护图像纹理细节并增强重建图像视觉质量. 实验结果表明了本文算法的有效性,重建图像的主观视觉质量和客观峰值信噪比 (Peak Signal to Noise Ratio, PSNR) 值均优于目前主流的压缩感知图像重建算法.

2 压缩感知理论

简单地说,压缩感知重建就是给定一个长度为 N 的一维信号 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^N$,利用 M 个随机线性测量值 \mathbf{y} ,对 \mathbf{x} 进行精确重建. 其中,测量值 \mathbf{y} 是通过将信号 \mathbf{x} 在感知测量矩阵 Φ ($\Phi \in \mathbf{C}^{M \times N}$, $M \ll N$) 上进行投影得到的 (压缩感知测量过程),即 $\mathbf{y} = \Phi \mathbf{x}$ ($\mathbf{y} \in \mathbf{R}^M$). 由于 $M \ll N$, $\mathbf{y} = \Phi \mathbf{x}$ 为欠定方程,不具有唯一解,因此无法直接利用测量值 \mathbf{y} 对原始信号 \mathbf{x} 进行精确重建. 但压缩感知理论表明^[1,2],如果信号 \mathbf{x} 自身或其某个变换域上足够稀疏,即信号 \mathbf{x} 自身或其变换域稀疏系数 θ 只包含 K 个非零元素 (其中 $\mathbf{x} = \Psi \theta$, Ψ 为稀疏基, $\mathbf{A} = \Phi \Psi$ 为新的感知测量矩阵),称为 K -稀疏,就可以仅利用 $M = 2K$ 个测量值,通过求解式 (1) 的 l_0 优化问题,对原始信号 \mathbf{x} 进行精确重建:

$$\mathbf{x} = \arg \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x}\|_0 \quad \text{s. t. } \mathbf{y} = \Phi \mathbf{x} \quad (1)$$

其中, $\|\cdot\|_0$ 表示 l_0 范数,其值为 \mathbf{x} 中非零元素的总个数, l_0 范数最小化即为求解信号的最稀疏解.

式(1)的 l_0 范数最小化是一个组合优化问题,是 NP 难解的,直接求解很困难,同时它对噪声也很敏感.虽然可以通过贪婪算法^[6,7] 算法求解,但性能受到限制. Donoho 等人^[2] 证明,若感知测量矩阵满足约束等距性(Restricted Isometry Property, RIP)^[20],可以通过凸松弛技术,将式(1)的求解转化为式(2)的求解,则二者具有等价解,即:

$$\mathbf{x} = \arg \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x}\|_1 \quad \text{s. t. } \mathbf{y} = \Phi \mathbf{x} \quad (2)$$

其中, $\|\cdot\|_1$ 表示 l_1 范数,即计算 \mathbf{x} 中所有元素的绝对值和. 式(2)的求解是一个凸优化问题,可以采用线性规划的求解方法进行解决. 也就是,经过上述转化,式(1) l_0 范数的最小化问题等价于式(2)的 l_1 范数最小化问题后,可以仅利用 $M = O(K \log(N/K))$ 个线性测量值对原始 K -稀疏信号进行精确重建^[1]. 式(2)还可以进一步改写为下面的无约束优化问题:

$$\mathbf{x} = \arg \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{y} - \Phi \mathbf{x}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{x}\|_1 \quad (3)$$

其中, λ 为拉格朗日乘子.

3 基于非局部自相似与低秩特性的压缩感知重建算法

图像中存在着大量重复的相似结构信息,其中的任意一个样本块,都能够在图像中找到大量的相似块. 这种相似结构不仅存在于平滑区域,同时也大量存在于纹理区域和边缘部分^[21,22]. 利用图像的这种非局部自相似性,既可以提高压缩感知图像重建的质量,同时也能够提高重建算法的适应性. 提取部分图像块作为样本块,将每个样本块及其相似图像块按照行或者列先展开成一维向量,所有的一维向量将组合为二维相似块矩阵. 由于相似图像块之间具有相似的结构纹理属性,即提取的图像相似块一维向量之间具有强相关性,从而聚合的二维相似块矩阵具有低秩属性. 从另一个角度来看,矩阵的秩也可以视为矩阵稀疏性的一种度量,基于信号稀疏性的图像恢复问题可以扩展为基于秩最小化的图像恢复问题. 因此,本文将图像的非局部自相似性及低秩属性作为压缩感知图像恢复的优化目标,并且以重建误差最小作为约束条件,引导优化结果偏向能感知获得最小测量误差的解,提出一种新的基于非局部相似块低秩的压缩感知重建算法.

给定原始图像 \mathbf{X} , 感知矩阵 Φ , 测量值 \mathbf{Y} , 图像 \mathbf{X} 的压缩感知重建问题可以转化为如下低秩优化问题:

$$\mathbf{X} = \arg \min_{\mathbf{X}} \sum_i^m \text{rank}(\mathbf{S}_i) \quad (4)$$

$$\text{s. t. } \|\mathbf{Y} - \Phi \mathbf{X}\|_2^2 \leq \sigma^2, \mathbf{S}_i \in \mathbf{V}_x$$

其中, σ^2 表示测量噪声的方差, m 为所选取的样本块总数, \mathbf{S}_i 为图像 \mathbf{X} 中第 i 个样本块及其非局部相似块构成的二维矩阵, \mathbf{V}_x 表示所有从图像 \mathbf{X} 中提取的图像样本块

与它们的相似块向量化后聚合的矩阵集合. \mathbf{S}_i 的每一列代表样本块 i 的一个相似图像块 \mathbf{x}_i , 这些相似图像块是通过在搜索窗口内对样本块进行块匹配获得的,即:

$$L_i = \{i_j | d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i_j}) < T\} \quad (5)$$

其中, L_i 表示样本块 i 的所有相似块在图像中的位置, $d(\cdot)$ 表示欧几里得距离, T 为预定义的相似度阈值. 令 s 表示 L_i 记录的图像块的总数, 即 $j = 1, 2, \dots, T$, 若样本块大小为 $n \times n$, 则矩阵 $\mathbf{S}_i = [\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i_2}, \dots, \mathbf{x}_{i_s}]$ 的大小为 $n^2 \times s$.

式(4)是一个矩阵秩最小化优化问题,直接求解非常困难. 引入一个辅助变量,将式(4)的求解转化为:

$$\mathbf{X} = \arg \min_{\mathbf{X}} \sum_i^m \text{rank}(\mathbf{S}_i) \quad (6)$$

$$\text{s. t. } \|\mathbf{Y} - \Phi \mathbf{X}\|_2^2 \leq \sigma^2, \mathbf{X} = \mathbf{U}, \mathbf{S}_i \in \mathbf{V}_U$$

其中, \mathbf{U} 为引入的辅助变量,可以视为 \mathbf{X} 的等价替换, \mathbf{V}_U 表示所有从图像 \mathbf{U} 中提取的图像样本块与它们的相似块向量化后聚合的矩阵集合. 式(6)的约束优化问题对应的增广拉格朗日函数为:

$$L(\mathbf{X}, \mathbf{U}) = \arg \min_{\mathbf{X}} \sum_i^m \text{rank}(\mathbf{S}_i) - \alpha(\mathbf{Y} - \Phi \mathbf{X}) + \frac{\beta}{2} \|\mathbf{Y} - \Phi \mathbf{X}\|_2^2 - \gamma(\mathbf{X} - \mathbf{U}) + \frac{\theta}{2} \|\mathbf{X} - \mathbf{U}\|_2^2 \quad (7)$$

其中, 矩阵 α 和 γ 为拉格朗日乘子, 标量 $\beta > 0$ 和 $\theta > 0$ 为正归一化参数. 通过选择合适的参数, 增广拉格朗日函数 $L(\mathbf{X}, \mathbf{U})$ 的鞍点即为式(4)的最优解. 式(7)可以通过迭代的方式求解如下:

$$(\mathbf{X}^{k+1}, \mathbf{U}^{k+1}) = \arg \min_{\mathbf{X}, \mathbf{U}} L(\mathbf{X}^k, \mathbf{U}^k) \quad (8)$$

$$\alpha^{k+1} = \alpha^k - \beta(\mathbf{Y} - \Phi \mathbf{X}^{k+1}) \quad (9)$$

$$\gamma^{k+1} = \gamma^k - \theta(\mathbf{X}^{k+1} - \mathbf{U}^{k+1}) \quad (10)$$

其中, 上标 k 和 $k+1$ 分别表示第 k 次和 $k+1$ 次迭代各变量的值. 式(7)的目标函数包含 NP 难的秩最小化问题, 直接对它进行求解仍然很困难. 本文采用交替方向乘子法 ADMM^[18] 将其划分为两个子问题, 对 \mathbf{X} 和 \mathbf{U} 分别进行求解.

对于固定的 α^k , γ^k 和 \mathbf{U}^k , 可通过式(11)求解 \mathbf{X}^{k+1} :

$$\mathbf{X}^{k+1} = \arg \min_{\mathbf{X}} -\alpha^k(\mathbf{Y} - \Phi \mathbf{X}) + \frac{\beta}{2} \|\mathbf{Y} - \Phi \mathbf{X}\|_2^2 - \gamma^k(\mathbf{X} - \mathbf{U}^k) + \frac{\theta}{2} \|\mathbf{X} - \mathbf{U}^k\|_2^2 \quad (11)$$

合并同类项后, 式(11)可简化为:

$$\mathbf{X}^{k+1} = \arg \min_{\mathbf{X}} \frac{\beta}{2} \|\mathbf{Y} - \Phi \mathbf{X} - \frac{\alpha^k}{\beta}\|_2^2 + \frac{\theta}{2} \|\mathbf{X} - \mathbf{U}^k - \frac{\gamma^k}{\theta}\|_2^2 \quad (12)$$

式(12)是一个二次优化问题, 有封闭解. 对其进行求导, 并令导数等于零可得:

$$\beta \Phi^T (\Phi X^{k+1} - Y + \frac{(\alpha^k)^T}{\beta}) + \theta (X^{k+1} - U^k - \frac{(\gamma^k)^T}{\theta}) = 0 \quad (13)$$

进而获得 X^{k+1} 的解, 即:

$$X^{k+1} = (\beta \Phi^T \Phi + \theta I)^{-1} (\beta Y - (\alpha^k)^T + \theta U^k + (\gamma^k)^T) \quad (14)$$

其中, I 为单位矩阵, $(\alpha^k)^T$ 和 $(\gamma^k)^T$ 分别表示 α^k 和 γ^k 的转置. 式(14)包含了矩阵求逆运算, 计算复杂度高. 尤其是对于图像数据来说, 矩阵的维度较大, 直接求解需要耗费大量的内存和时间. 本文采用共轭梯度法对其进行求解.

在求得 X^{k+1} 之后, 假设其已经固定, 则 U^{k+1} 的解可表示为:

$$U^{k+1} = \arg \min_U \sum_i^m \text{rank}(S_i) - \gamma^k (X^{k+1} - U) + \frac{\theta}{2} \|X^{k+1} - U\|_2^2 \quad \text{s. t. } S_i \in V_U \quad (15)$$

通过合并同类项, 式(15)简化为:

$$U^{k+1} = \arg \min_U \sum_i^m \text{rank}(S_i) + \frac{\theta}{2} \|X^{k+1} - U - \frac{(\gamma^k)^T}{\theta}\|_2^2 \quad \text{s. t. } S_i \in V_U \quad (16)$$

式中, 第一项表示为图像 U 中的相似块矩阵 S_i 寻找秩最小解, 求和表示对所有相似块组的秩求最小解. 利用图像非局部相似块组及图像本身的可分性, 可先对每个相似块组分别进行秩最小化求解, 然后将每个块组的解进行聚合得到最终的恢复图像, 将式(16)转化到块级别进行求解:

$$S_i^{k+1} = \arg \min_{S_i} \text{rank}(S_i) + \frac{\theta}{2} \|S_i - P_i\|_F^2 \quad (17)$$

其中, P_i 表示图像 $X^{k+1} - \frac{(\gamma^k)^T}{\theta}$ 中的一个相似块组, 该块组中图像块的对应位置坐标与相似块矩阵 S_i 中的图像块在 L_i 中被记录下的位置相同.

式(17)是一个矩阵秩最小化问题, 本文采用加权核范数最小化算法^[19]进行求解. 矩阵 Y 的加权核范数定义为: $\|Y\|_{w,*} = \sum_i |\omega_i \sigma_i(Y)|$. 其中, $\sigma_i(Y)$ 表示矩阵 Y 的第 i 个奇异值, $w = [\omega_1, \dots, \omega_n]$ 表示权重向量, $\omega_i \geq 0$ 是分配给 $\sigma_i(Y)$ 的非负权重. 利用矩阵加权核范数替代矩阵的秩, 式(17)可等价如下优化问题:

$$S_i^{k+1} = \arg \min_{S_i} \tau \|S_i\|_{w,*} + \frac{1}{2} \|S_i - P_i\|_F^2 \quad (18)$$

其中, $\tau = 1/\theta$. 由于矩阵的奇异值通常是非升序的, 且较大的奇异值通常对应矩阵中更重要的子空间成分^[19], 在权值分配时应该给较大的奇异值分配较小的权重, 权重的分配是非降序的. 本文将权重设置为

$\omega_i = c\sqrt{s}/(\sigma_i(U^{k+1}) + \varepsilon)$. 其中, $c > 0$ 为常量, ε 是一个较小的常量用以避免除数为零, $\sigma_i(U^{k+1})$ 为 U^{k+1} 的第 i 个奇异值, 由于初始求解时 U^{k+1} 未知, $\sigma_i(U^{k+1})$ 不可用, 故将其初始值设定为 $\hat{\sigma}_i(U^{k+1}) = \sqrt{\max(\sigma_i(X^{k+1}) - s\sigma_X^2, 0)}$, s 表示单个样本块的相似块总个数, σ_X^2 表示 X^{k+1} 的噪声方差. 因为 $0 \leq \omega_1 \leq \dots \leq \omega_n$, 故式(18)中的优化问题是非凸的, 较难获取其全局最优解, 可通过奇异值阈值 (Singular Value Threshold, SVT)^[19,23] 操作获得其近似最优解:

$$\hat{S}_i^{k+1} = US_{w,\tau}(\Sigma)V^T \quad (19)$$

其中, $P_i = U\Sigma V^T$ 为矩阵 P_i 的奇异值分解 (Singular Value Decomposition, SVD) 结果, $S_{w,\tau}(\Sigma)$ 是参数为 τ 、权重矢量为 w 的对角矩阵 Σ 的软阈值函数. 对 Σ 中的每一个对角元素 Σ_{ii} , 满足:

$$S_{w,\tau}(\Sigma_{ii}) = \max(\Sigma_{ii} - \tau\omega_i, 0) \quad (20)$$

利用式(19)和式(20)对各个块组的秩最小化求解后, 还需要对这些解进行调整聚合^[24]. 也就是, 将所求得的所有 S_i^{k+1} 的解求平均 (由于每个图像块可能被多个样本块选为相似块, 因此需要对每个图像块在所有 S_i^{k+1} 中出现的次数进行平均), 把平均值返回到图像中的对应位置处, 便得到 U^{k+1} 的解.

获得 X^{k+1} 和 U^{k+1} 之后, 利用式(9)和(10)进行参数更新, 并继续下一次迭代, 直至满足迭代终止条件为止. 最后一次迭代输出的 X^{k+1} , 就是原始图像的重建图像 \hat{X} . 首次迭代时 X 和 U 均是未知的, 可以采用基于离散余弦变换 (Discrete Cosine Transform, DCT) 等经典压缩感知重建算法获得一个原始图像的初始估计值, 并将其同时赋值给 X 和 U .

为了降低算法的计算复杂度, 在 U 子问题的求解中, 我们每隔 J 次迭代进行一次相似块位置重定位, 而不是在每次迭代中都进行相似块搜索. 进行相似块组合所使用的图像是当次迭代中由 X 子问题求得的重建图像. 归纳起来, 完整算法如算法 1.

算法 1 基于非局部自相似性的压缩感知图像恢复算法

输入: 从原始图像 X 采样得到的压缩感知测量值 Y

1: 初始化:

(a) 采用标准 CS 重建算法 (DCT/DWT) 对 Y 进行重建获得初始估计图像 \hat{x}

(b) 初始化 $X^0 = \hat{x}$, $U^0 = \hat{x}$, $\alpha^0 = 0$, $\gamma^0 = 0$, $J, c, \beta, \theta, \tau, \varepsilon, k = 0$

2: While 不满足终止条件 do

3: 求解 X 子问题得 X^{k+1} :

$$X^{k+1} = (\beta \Phi^T \Phi + \theta I)^{-1} (\beta Y - (\alpha^k)^T + \theta U^k + (\gamma^k)^T)$$

4: If $\text{mod}(k, J) = 0$

基于 X^{k+1} 按式(5)搜索并记录每个样本块 i 的相似块位置 (L_i)

End if

5: 根据 L_i 为每个样本块 i 构建相似块矩阵 P_i , 采用加权核范数最小化算法求解式(17):

(a) 估计权重矢量 w

(b) 奇异值阈值分解: $[U, \Sigma, V] = \text{SVD}(P_i)$

(c) 获得估计值: $\hat{S}_i^{k+1} = US_{w,\tau}(\Sigma) V^T$

6: 对 S^{k+1} 求平均, 得到 U^{k+1}

7: 分别根据式(8)和式(9)计算 α^{k+1} 和 γ^{k+1}

8: $k = k + 1$

9: End while

输出: 重建图像 $\hat{X} = X^{k+1}$

4 实验

我们的实验中,所有的测试方法,压缩感知编码均选用相同的二维傅里叶域仿射采样. 与其他采样方式相比,仿射采样通常会产生较难移除的图像拖痕,因此更利于评价算法的有效性和鲁棒性. 当然,提出的方法也适用于其他采样方式.

为了评估提出的算法的性能,我们同时选择了6张具有不同属性的图像进行性能测试,所选用的图像如图1所示,所有测试图像均为 256×256 的灰度图像. 为了评估提出算法的鲁棒性,我们同时测试了算法在测量值有噪和无噪情况下的重建性能. 所选择的用于性能比较的算法为: RecPF^[25]、NESTA^[26]、BM3D-CS^[16]、NLR-CS^[17], 它们都是当前主流的压缩感知重建算法. 在所有实验中,均采用相同的采样方式,并用 PSNR 值对重建图像的质量进行客观评估.



图1 测试图像

4.1 参数设置

在仿真实验中,本文提出的算法的参数设置如下: 拉格朗日乘子 α 和 γ 均初始化为全零矩阵. 在求解 X 子问题时,根据统计结果,正则化参数 β 和 θ 均设置为 0.05. 在求解 U 子问题的过程中,经验性地将样本块大小设置为 6×6 ($n=6$),为了减少计算量,使得相邻两个样本块之间间隔 5 个像素,即水平和垂直方向均是每

隔 5 个像素提取一个样本块;另外,虽然所选取的相似块数量越多恢复图像的精度越高,但是为了平衡计算复杂度和重建精度,设定相似块数量为 45 ($s=45$);在进行相似块搜索时,考虑所需样本块数量和搜索复杂度,根据相似块大多分布在样本块的邻近位置处,将搜索窗口设定为以当前样本块为中心的 40×40 的图像区域. 测试过程中,仿射采样的仿射线分别取为 26, 55, 84, 117, 152, 对应采样率 (Sub-Sampling Rate, SR) 约为 0.05, 0.10, 0.15, 0.20, 0.25. 图 2 给出了仿射线 Radial Lines, 数目 L 分别为 26, 84, 192 时的采样掩模. 比较算法的代码均取自原作者主页,本文算法 WNNM-CS 和比较的 NLR-CS 算法均采用标准的 DCT 算法估计初始图像,采用相同的相似块数量和探索窗口大小,总的迭代次数均设置为 180 次.

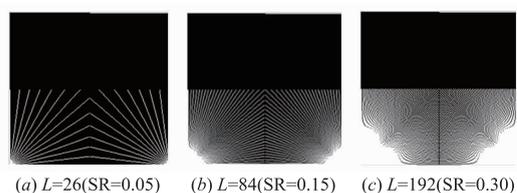


图2 仿射采样掩模

4.2 实验结果

图 3 和图 4 分别给出了图像 Boats 和 Barbara 在 $SR=0.10$ 和 $SR=0.15$ 下的重建图像及残差图像,其中 WNNM-CS 为本文提出的算法. 从图中可以看出,经典的 RecPF 和 NESTA 算法使用了全变分正则项进行压缩感知重建,由于假设的局部平滑特性较弱,不能很好地适应复杂的纹理,使得重建图像呈现出油画效果, BM3D-CS 算法相比传统算法有了较大的性能提高,而本文提出的 WNNM-CS 算法与最新的 NLR-CS 算法,低秩正则项的引入很好地利用了图像的非局部特征,性能明显地优于其他算法. 从图 4 还可以注意到,对于纹理特别丰富的 Barbara,提出的 WNNM-CS 算法比 NLR-CS 算法性能更优, PSNR 增益达到 1.72dB,放大图像 (500%) 也可以看出 NLR-CS 重建图像的人物脸部受到周边区域影响有较明显的条纹,而 WNNM-CS 重建的则更为光滑,细节更为清晰,重建残差也更小.

表 1 详细列出了各测试图像在不同采样率下的测试算法的重建图像 PSNR 值,每幅图像在每种采样率下的重建图像的最高 PSNR 值用黑色粗体标出. 从表中可以看出,不同率采样下,所有的测试样例, BM3D-CS 算法由于在重建过程中利用了图像非局部自相似性提高图像的稀疏表示度,其重建质量均优于传统的全变分 NESTA 和 RecPF 算法. 而采用了相似块低秩约束的 NLR-CS 和 WNNM-CS 算法进一步挖掘了图像的非局部特性,其重建图像质量更优于 BM3D-CS 算法. 提出的 WNNM-CS 算法与

最新的 NLR-CS 算法相比较,都利用了图像相似块的低秩约束,重建图像质量也大致接近.但可以注意到,在采样率较低时,提出的 WNNM-CS 算法重建图像质量比 NLR-CS 算法更优,特别是对于 Barbara, Monarch 等纹理丰富的图像,性能增益更明显.采样率为 0.05、0.1 和 0.15 时,采用 WNNM-CS 算法 Barbara 的重建图像 PSNR 分别高于采用 NLR-CS 算法 0.31 dB、2.10 dB 和 1.72 dB,

而 Monarch 分别高于 NLR-CS 0.91 dB、2.10 dB 和 0.05 dB.从压缩感知求解问题模型上看,这是由于 WNNM-CS 全局目标函数的构建倾向于引导获得最小重建误差的解,而 NLR-CS 的最优低秩表示模型倾向于利用图像块间的结构相似性,会在一定程度上损失图像细节;而当采样率较高时,由于测量值较多,对图像细节的表达已经比较清晰,NLR-CS 略优于我们的算法,但差异相对较小.

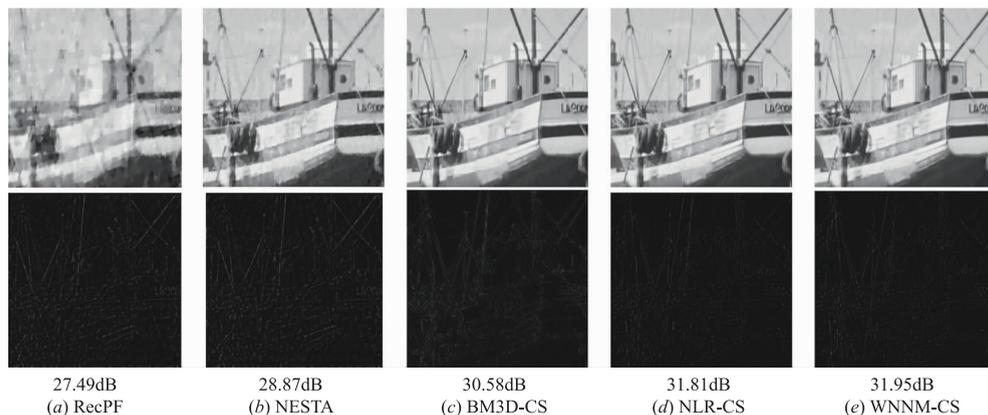


图3 测试图像Boats在采样率为0.10时的重建图像(第一行)及重建残差图像(第二行)

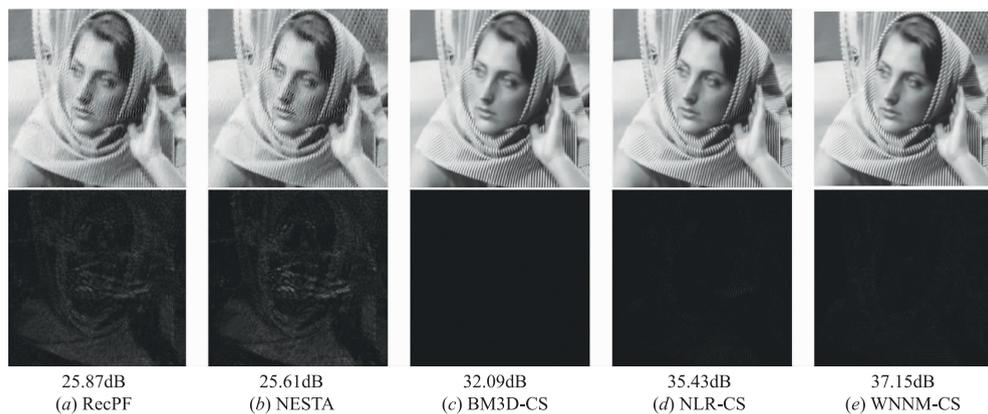


图4 测试图像Barbara在采样率为0.15时的重建图像(第一行)及重建残差图像(第二行)

图5分别给出了图像Lena和Peppers在每种重建算法下的率失真曲线图(重建PSNR值关于采样率的函数曲线图),可以更直观的看出,当采样率较低时,WN-

NM-CS的重建性能优于NLR-CS;当采样率较高时,NLR-CS略优于WNNM-CS.同时,无论采样率高低,WNNM-CS均优于除NLR-CS外的其他三种测试算法.

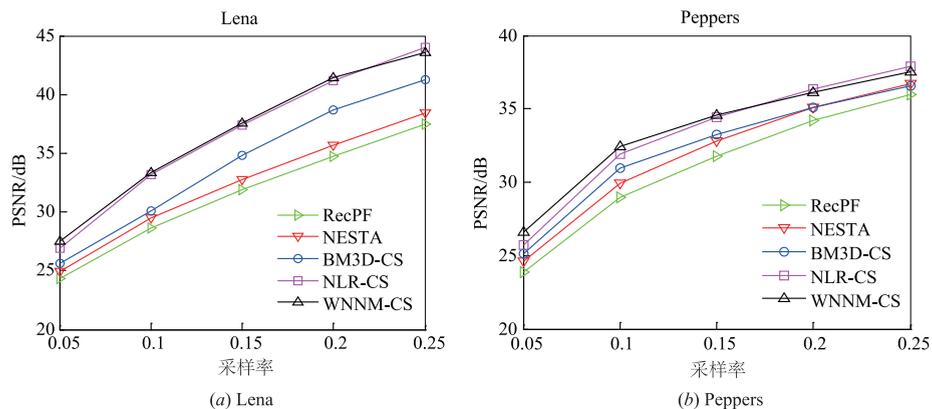


图5 率失真曲线图

这也进一步说明了提出的 WNNM-CS 算法的有效性,特别是在低采样率和图像纹理丰富时,其性能甚至优于最新的 NLR-CS 算法.

表 1 不同算法重建图像的 PSNR (dB) 值

测试图像	重建方法	采样率				
		SR = 0.05	SR = 0.10	SR = 0.15	SR = 0.20	SR = 0.25
Barbara	RecPF	22.41	24.37	25.87	27.95	31.14
	NESTA	22.35	24.09	25.61	28.40	32.25
	BM3D-CS	22.57	26.83	32.09	34.82	36.95
	NLR-CS	24.10	30.18	35.43	39.79	42.17
	WNNM-CS	24.41	33.28	37.15	40.12	42.02
Parrots	RecPF	25.33	30.89	34.41	37.28	39.72
	NESTA	26.46	32.35	35.77	38.15	40.96
	BM3D-CS	28.31	33.98	37.03	39.21	41.19
	NLR-CS	29.27	34.28	39.25	41.60	43.58
	WNNM-CS	29.53	35.35	38.65	41.15	43.07
Lena	RecPF	24.31	28.64	31.89	34.76	37.48
	NESTA	24.96	29.51	32.79	35.72	38.45
	BM3D-CS	25.62	30.08	34.79	38.66	41.27
	NLR-CS	26.95	33.15	37.39	41.17	43.97
	WNNM-CS	27.56	33.38	37.56	41.42	43.59
Monarch	RecPF	20.83	27.55	31.92	35.13	38.21
	NESTA	21.51	28.86	33.20	36.38	39.23
	BM3D-CS	23.45	30.76	34.26	37.11	40.13
	NLR-CS	23.58	32.63	37.35	40.77	43.28
	WNNM-CS	25.68	33.54	37.40	40.42	42.99
Boats	RecPF	23.37	27.49	31.61	33.40	37.40
	NESTA	23.78	28.87	32.40	35.20	37.93
	BM3D-CS	25.17	30.58	34.11	36.52	39.06
	NLR-CS	25.34	31.81	35.80	38.88	41.48
	WNNM-CS	26.01	31.95	35.83	38.92	41.14
Peppers	RecPF	23.90	28.98	31.76	34.21	35.98
	NESTA	24.61	29.95	32.79	35.09	36.75
	BM3D-CS	25.12	30.98	33.22	35.12	36.54
	NLR-CS	25.74	31.94	34.41	36.34	37.87
	WNNM-CS	26.57	32.41	34.58	36.15	37.56

为了评估算法在有噪声环境下的有效性,与文献 [17] 一样,我们在测量值中加入不同量级的噪声进行测试,比较各种算法的重建性能.图 6 分别给出了采样率为 0.15 下图像 Monarch 和 Boats 在测量值受不同量级高斯白噪声影响情况下的重建性能曲线,横轴为图

像感知测量值的信噪比(Signal to Noise Ratio, SNR),取值范围从 15 dB 到 35 dB,纵轴为重建图像的 PSNR.从图 6 可以看出,在有噪声的情况下,提出的算法 WNNM-CS 的重建性能仍然优于其他对比算法,取得了很好的重建效果.

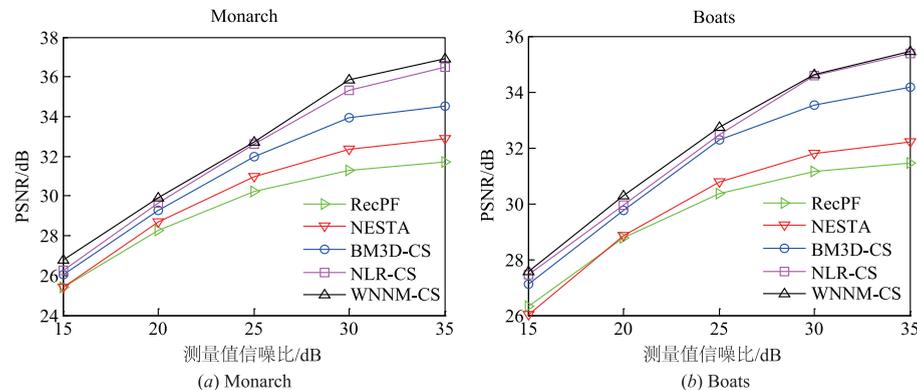


图6 算法测量含噪重建性能比较

5 结论

经典的压缩感知算法一般只考虑了信号在某个特定特征空间的稀疏特性,没有挖掘信号的局部和其他结构化特征,致使重建信号的细节保护不够且适应性偏弱.考察图像信号的结构可以发现,图像中存在着大量重复的相似结构信息,这种相似结构不仅存在于平滑区域,同时也大量存在于纹理区域和边缘部分.利用图像的这种非局部自相似性,既可以提高压缩感知图像重建的质量,也能够同时提高重建算法的适应性.基于这种观察,本文提出一种图像相似块低秩的压缩感知图像重建算法,将图像恢复问题转化为聚合的相似块矩阵秩最小问题,以最小压缩感知重建误差为约束构建优化模型,并采用加权核范数最小化算法求解.实验表明,算法很好地保护了图像的结构和纹理细节,对于不同的测试图像,在无噪和有噪环境下,算法性能都明显地优于传统的压缩感知图像重建算法,低采样率情况和图像纹理丰富时,其性能优于最新的同类算法.

参考文献

- [1] Candes E J, Romberg J, Tao T. Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information [J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, 52(2): 489 – 509.
- [2] Donoho D L. Compressed sensing [J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, 52(4): 1289 – 1306.
- [3] Hitomi Y, Gu J, Gupta M, Mitsunaga T, Nayar S K. Video from a single coded exposure photograph using a learned over-complete dictionary [A]. 2011 International Conference on Computer Vision (ICCV) [C]. Barcelona: IEEE, 2011: 287 – 294.
- [4] 刘记红, 黎湘, 徐少坤, 庄钊文. 基于改进正交匹配追踪算法的压缩感知雷达成像方法 [J]. *电子与信息学报*, 2012, 34(6): 1844 – 1850.
- [5] Liu J H, Li X X, Xu S K, Zhuang Z W. Compressed sens-

ing radar imaging methods based on modified orthogonal matching pursuit algorithms [J]. *Journal of Electronics and Information Technology*, 2012, 34(6): 1844 – 1850. (in Chinese)

- [5] Chen S S, Donoho D, Saunders M A. Atomic decomposition by basis pursuit [J]. *SIAM Review*, 2001, 43(1): 129 – 159.
- [6] Tropp J A, Gilbert A C. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit [J]. *IEEE Transactions Information Theory*, 2007, 53(2): 4655 – 4666.
- [7] Dai W, Milenkovic O. Subspace Pursuit for Compressive Sensing: Closing the Gap Between Performance and Complexity [EB/OL]. <http://arxiv.org/abs/0803.0811>, 2008.
- [8] Elad M, Matalon B, Shtok J, et al. A wide-angle view at iterated shrinkage algorithms [J]. *Optical Engineering + Applications*. International Society for Optics and Photonics, 2007, 6701: 26 – 29.
- [9] Osher S, Mao Y, Dong B, Yin W. Fast linearized Bregman iteration for compressive sensing and sparse denoising [J]. *Communications in Mathematical Sciences*, 2010, 8(1): 93 – 111.
- [10] Trzasko J, Manduca A. Highly undersampled magnetic resonance image reconstruction via homotopic l_0 -minimization [J]. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 2009, 28(1): 106 – 121.
- [11] Li C, Yin W, Zhang Y. TVAL3: TV Minimization by Augmented Lagrangian and Alternating Direction Algorithms [EB/OL]. <http://www.caam.rice.edu/optimization/LI/TVAL3/>, 2009.
- [12] 李志林, 陈后金, 李居朋, 姚畅, 杨娜. 一种有效的压缩感知图像重建算法 [J]. *电子学报*, 2011, 39(12): 2796 – 2800.
- [13] Li Z L, Chen H J, Li J P, Yao C, Yang N. An efficient algorithm for compressed sensing image reconstruction [J]. *Acta Electronica Sinica*, 2011, 39(12): 2796 – 2800. (in Chinese)

- [13] 王良君,石光明,李甫,谢雪梅,林耀海. 多稀疏空间下的压缩感知图像重构[J]. 西安电子科技大学学报(自然科学版),2013,40(3):73-80.
Wang L J, Shi G M, Li F, Xie X M, Lin Y H. Compressed sensing image reconstruction in multiple sparse spaces [J]. Journal of Xidian University (Natural Science), 2013, 40(3):73-80. (in Chinese)
- [14] Dong W, Shi G, Li X, Zhang L, Wu X. Image reconstruction with locally adaptive sparsity and nonlocal robust regularization [J]. Signal Processing: Image Communication, 2012, 27(10):1109-1122.
- [15] Dong W, Shi G, Li X. Nonlocal image restoration with bilateral variance estimation; a low-rank approach [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2013, 22(2):700-711.
- [16] Egiazarian K, Foi A, Katkovnik V. Compressed sensing image reconstruction via recursive spatially adaptive filtering [A]. 2007 International Conference on Image Processing (ICIP) [C]. San Antonio: IEEE, 2007. 1-549-1-552.
- [17] Dong W, Shi G, Li X, Ma Y, Huang F. Compressive sensing via nonlocal low-rank regularization [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2014, 23(8):3618-3632.
- [18] Boyd S, Parikh N, Chu E, Peleato B, Eckstein J. Distributed optimization and statistical learning via the alternating direction method of multipliers [J]. Foundations and Trends in Machine Learning, 2010, 3(1):1-122.
- [19] Gu S, Zhang L, Zuo W, et al. Weighted nuclear norm minimization with application to image denoising [A]. 2014 Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR) [C]. Columbus: IEEE, 2014. 2862-2869.
- [20] Plumbley M D, Bevilacqua M. Sparse reconstruction for compressive sensing using stagewise polytope faces pursuit [A]. 2009 International Conference on Digital Signal Processing (DSP) [C]. Santorini: IEEE, 2009. 1-8.
- [21] Buades A, Coll B, Morel J M. A non-local algorithm for image denoising [A]. 2005 Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR) [C]. San Diego: IEEE, 2005. 60-65.
- [22] Dabov K, Foi A, Katkovnik V, Egiazarian K. Image denoising by sparse 3-d transform-domain collaborative filtering [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2007, 16(8):2080-2095.
- [23] Cai J, Candes E, Shen Z. A singular value thresholding algorithm for matrix completion [J]. SIAM Journal on Optimization, 2010, 20(4):1956-1982.
- [24] Tang S, Zheng Y T, Wang Y, Chua T S. Sparse ensemble learning for concept detection [J]. IEEE Transactions on Multimedia, 2012, 14(1):43-54.
- [25] Yang J F, Zhang Y, Yin W T. A fast alternating direction method for TVL1-L2 signal reconstruction from partial Fourier data [J]. IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing, 2010, 4(2):288-297.
- [26] Becker S, Bobin J, Candès E J. NESTA: a fast and accurate first-order method for sparse recovery [J]. SIAM Journal on Imaging Sciences, 2011, 4(1):1-39.

作者简介



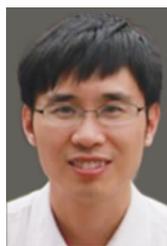
宋云男,1974年9月出生于湖南省汨罗市.长沙理工大学计算机与通信工程学院副教授,硕士研究生导师,现于湖南大学信息科学与工程学院攻读博士学位.主要研究方向包括数字图像处理、视频编解码、压缩感知和计算机视觉等.

E-mail:sonie@126.com



李雪玉女,1991年1月出生于河南省信阳市,长沙理工大学硕士研究生,中国科学院计算技术研究所客座学生.主要研究方向为数字图像处理、视频编解码和计算机视觉等.

E-mail:lixueyu_17@163.com



沈燕飞男,1976年4月出生于江苏省靖江市,中国科学院计算技术研究所副研究员,博士.主要从事数字图像处理、多媒体通信和计算机视觉等方面的研究工作.

E-mail:syf@ict.ac.cn



杨高波男,1974年7月出生于湖南省岳阳市,湖南大学信息科学与工程学院教授,博士研究生导师,主要研究方向为数字图像处理、视频编解码、数字图像安全等.

E-mail:yanggaobo@hnu.edu.cn